

信号与系统

第2章 连续时间信号与系统的时域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第2章 连续时间信号与系统的时域分析

2.1 系统微分方程的经典解

2.2 零输入响应与零状态响应

2.3 单位冲激响应与单位阶跃响应

2.4 卷积积分

2.1 系统微分方程的经典解

微分方程的基本概念

微分方程的经典解

初始状态和初始条件的讨论

■ 微分方程的基本概念

对于单输入单输出的LTI连续系统来说，描述其输入-输出关系的数学模型是 n 阶常系数线性微分方程，其一般形式为：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1} e^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t)$$

➤ **初始条件：** n 阶系统在 $t = 0$ 时接入激励，响应在 $t = 0_+$ 时刻的值。

$$y^{(j)}(0_+) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{激励接入后的瞬间}$$

➤ **初始状态：** n 阶系统在激励尚未接入的 $t = 0_-$ 时刻的响应值，该值反映了系统的历史情况，而与激励无关。

$$y^{(j)}(0_-) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{激励接入前的瞬间}$$

■ 微分方程的经典解

齐次解 $y_h(t)$

- 微分方程右侧为零时称为齐次方程，即 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0$ 。
- 齐次解指齐次方程的解，只由系统的特征根决定。

n 阶微分方程的齐次解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{特征方程} \\ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \\ \text{特征根} \quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \end{array}$$

■ 特征根均为单根： $y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$

■ 特征根含 r 重根 λ_1 ： r 重根对应 $(C_1 t^{r-1} + C_2 t^{r-2} + \cdots + C_{r-1} t + C_r) e^{\lambda_1 t}$

■ 特征根含共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ： 共轭复根对应的解为

$$e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t] \quad \text{或} \quad Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \quad Ae^{j\theta} = C_1 + jC_2$$

■ 微分方程的经典解

特解 $y_p(t)$ 特解的形式与激励的函数形式有关。

下表给出几种典型激励信号对应的特解形式。

激励信号 $e(t)$	特解 $y_p(t)$
E (常数)	P (常数)
t	$P_1 t + P_0$ 所有特征根不为 0 $t(P_1 t + P_0)$ 有一个为 0 的特征根
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$ α 不等于特征根 $(P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$ α 等于特征单根
$\cos(\beta t), \sin(\beta t)$	$P_1 \cos(\beta t) + P_2 \sin(\beta t)$ 或 $A \cos(\beta t - \theta)$, $Ae^{j\theta} = P_1 + jP_2$

根据激励的形式选定含待定系数的特解，将特解和激励代入原微分方程中，比较方程两端的系数可确定待定系数大小。

激励在 $t = 0$ 时刻加入系统，故特解存在区间为 $t > 0$ 。

■ 微分方程的经典解

全解 $y(t)$

- 将特解与齐次解相加就得到全解。
- 此时齐次解中尚含待定系数 C_i ， n 阶微分方程需利用 n 个初始条件 $y(0_+)$, $y'(0_+)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(0_+)$ 确定之。

经典解法流程图

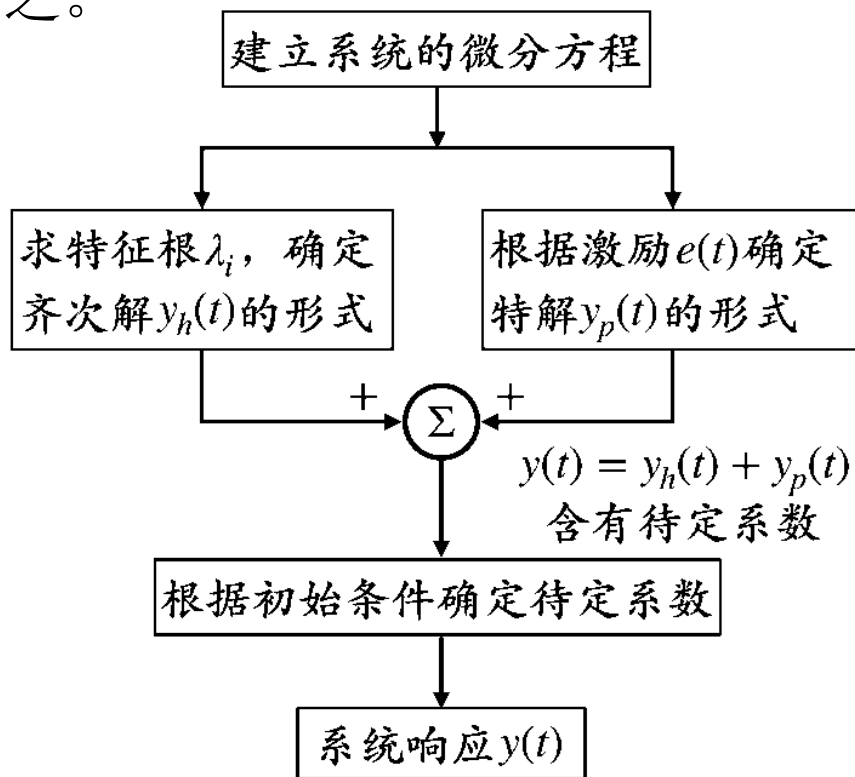
$$y(t) = \underline{y_h(t)} + \underline{y_p(t)}$$

齐次解

特解

自由响应

强迫响应



例题1 某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e(t)$

- 1) 当 $e(t) = 2e^{-t}$, $t \geq 0$, $y(0_+) = 2, y'(0_+) = -1$ 时, 求解系统全解;
- 2) 当 $e(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$, $y(0_+) = 1, y'(0_+) = 0$ 时, 求解系统全解。

■ 微分方程的经典解

自由响应和强迫响应

- **自由响应**：仅与系统本身特性有关，而与激励的形式无关，齐次解仅与系统特征根有关，特征根称为系统的“固有频率”，**齐次解**常称为系统的**固有响应**或**自由响应**。
- **强迫响应**：与激励的函数形式有关，**特解**的形式与激励的形式有关，常称为**强迫响应**。

暂态响应和稳态响应

- **暂态响应**：指响应中暂时出现的分量，随着时间增长，它将消失。
- **稳态响应**：指稳定的分量，常以阶跃函数和周期函数等形式存在。
如：电路系统中的直流稳态响应和正弦稳态响应。

例题2 某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e(t)$

1) 当 $e_1(t) = 10 \cos t$ 时, 全响应 $y_1(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

2) 当 $e_2(t) = 2e^{-t}$ 时, 全响应 $y_2(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$

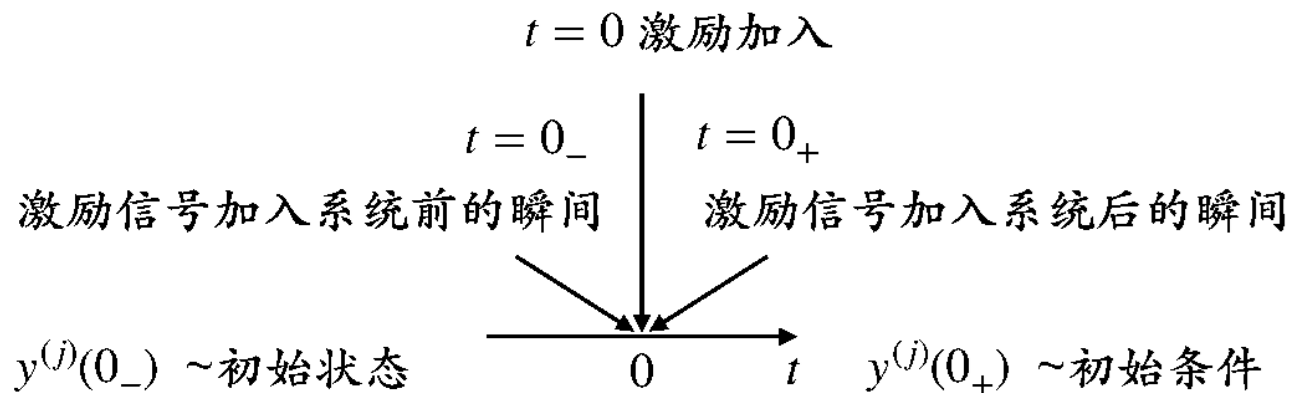
3) 当 $e_3(t) = \varepsilon(t)$ 时, 全响应 $y_3(t) = -e^{-2t} + 3$

判断以上全响应中的自由响应、强迫响应、暂态响应和稳态响应分量。

■ 初始状态和初始条件的讨论

初始状态: $y^{(j)}(0_-)$

初始条件: $y^{(j)}(0_+)$



- 实际中，往往先得知系统的初始状态，即先得知激励接入前系统的历史信息。
- 由于激励的接入，从 0_- 时刻过渡到 0_+ 时刻之后，初始状态和初始条件往往不一样，我们用跳变量表示这个变化。
- 求解微分方程需要从已知的初始状态 $y^{(j)}(0_-)$ 求得初始条件 $y^{(j)}(0_+)$ 。

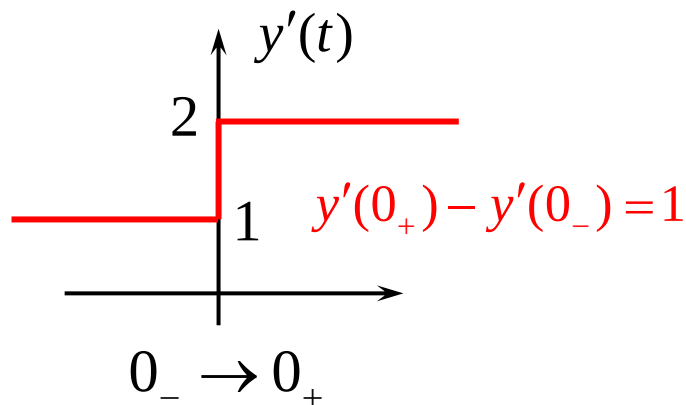
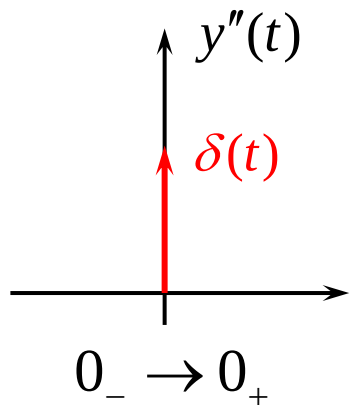
■ 初始状态和初始条件的讨论

➤ 基本思路

如果激励加入后，在方程右端出现 $\delta(t)$ 及其各阶导数，则在方程左端也应有与之对应的 $\delta(t)$ 及其各阶导数项，使方程两端平衡。

冲激函数的产生，意味着方程左端 $y^{(i)}(t)$ 中的某些项在 $t=0$ 处有阶跃的跳变。

举例：



介绍两种求解初始条件的主要方法：**待定系数法**和**冲激平衡法**，后续做题主要使用后者。

例题3

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e''(t) + 2e'(t) + e(t)$
已知系统激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，系统的初始状态为 $y(0_-) = 0$, $y'(0_-) = 1$ ，试求系统的初始条件 $y(0_+)$, $y'(0_+)$ 。

法1:
$$\underline{y''(t)} + 4y'(t) + 3y(t) = \underline{\delta'(t)} + 2\delta(t) + \varepsilon(t)$$

积分，且只考虑冲激和阶跃项

$$y''(t) = \delta'(t) + a\delta(t) + b\varepsilon(t)$$

$$y'(t) = \delta(t) + a\varepsilon(t)$$

$$y(t) = \varepsilon(t)$$

代入微分方程，只看冲激项

$$\delta'(t) + (4+a)\delta(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

$$4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$\begin{cases} y'(t) = \delta(t) - \underline{2\varepsilon(t)} \\ y(t) = \underline{\varepsilon(t)} \end{cases}$$

跳变量



$$\begin{cases} y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 0 + 1 = 1 \\ y'(0_+) = y'(0_-) + y'_e(0_+) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

例题3

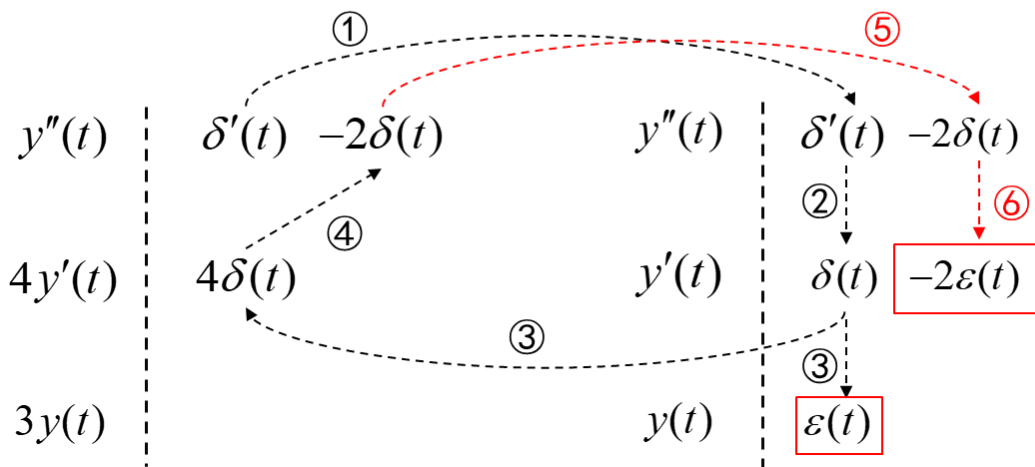
某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e''(t) + 2e'(t) + e(t)$
 已知系统激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，系统的初始状态为 $y(0_-) = 0$, $y'(0_-) = 1$ ，试求
 系统的初始条件 $y(0_+)$, $y'(0_+)$ 。

法2:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + \varepsilon(t)$$

方程左侧各项

方程左侧各项的单位项



从高往低配，从左往右配
 只看冲激项，高阶补低阶
 左侧看配平，右侧出跳变

$$\begin{cases} y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 0 + 1 = 1 \\ y'(0_+) = y'(0_-) + y'_e(0_+) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

2.2 零输入响应与零状态响应

零输入响应

零状态响应

系统全响应

求解思路总结

■ 零输入响应 zero input

零输入响应 $y_{zi}(t)$

- 零输入响应指的是在激励为零时，仅由初始状态引起的响应。
- 由于激励为零，因此 $y_{zi}(t)$ 对应齐次方程 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0$ 。
- 零输入响应由特征根决定，形式为齐次解。当特征根均为单实根时，零输入响应的形式为

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n C_{xi} e^{\lambda_i t}, t \geq 0$$

- 确定待定系数 C_{xi} ：由初始状态 $y^{(j)}(0_-)$ 确定，由于没有激励，此时系统的初始状态就是零输入响应的初始条件，即 $y_{zi}^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_-)$ 。

■ 零状态响应 zero state

零状态响应 $y_{zs}(t)$

- 零状态响应指的是在初始状态为零时，仅由激励引起的响应。
- 此时 $y_{zs}(t)$ 对应非齐次方程 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t)$ 。
- 零状态响应包含相应的齐次解和特解两部分。当特征根均为单实根时，零状态响应的形式为

$$y_{zs}(t) = \sum_{i=1}^n C_{si} e^{\lambda_i t} + y_p(t) \quad t > 0$$

- 确定待定系数 C_{si} ：由零状态初始条件 $y_{zs}^{(j)}(0_+)$ 确定。

$y_{zs}^{(j)}(0_+) =$ 跳变量，通过冲激平衡法确定

■ 全响应

$$\text{全响应 } y(t) \quad y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

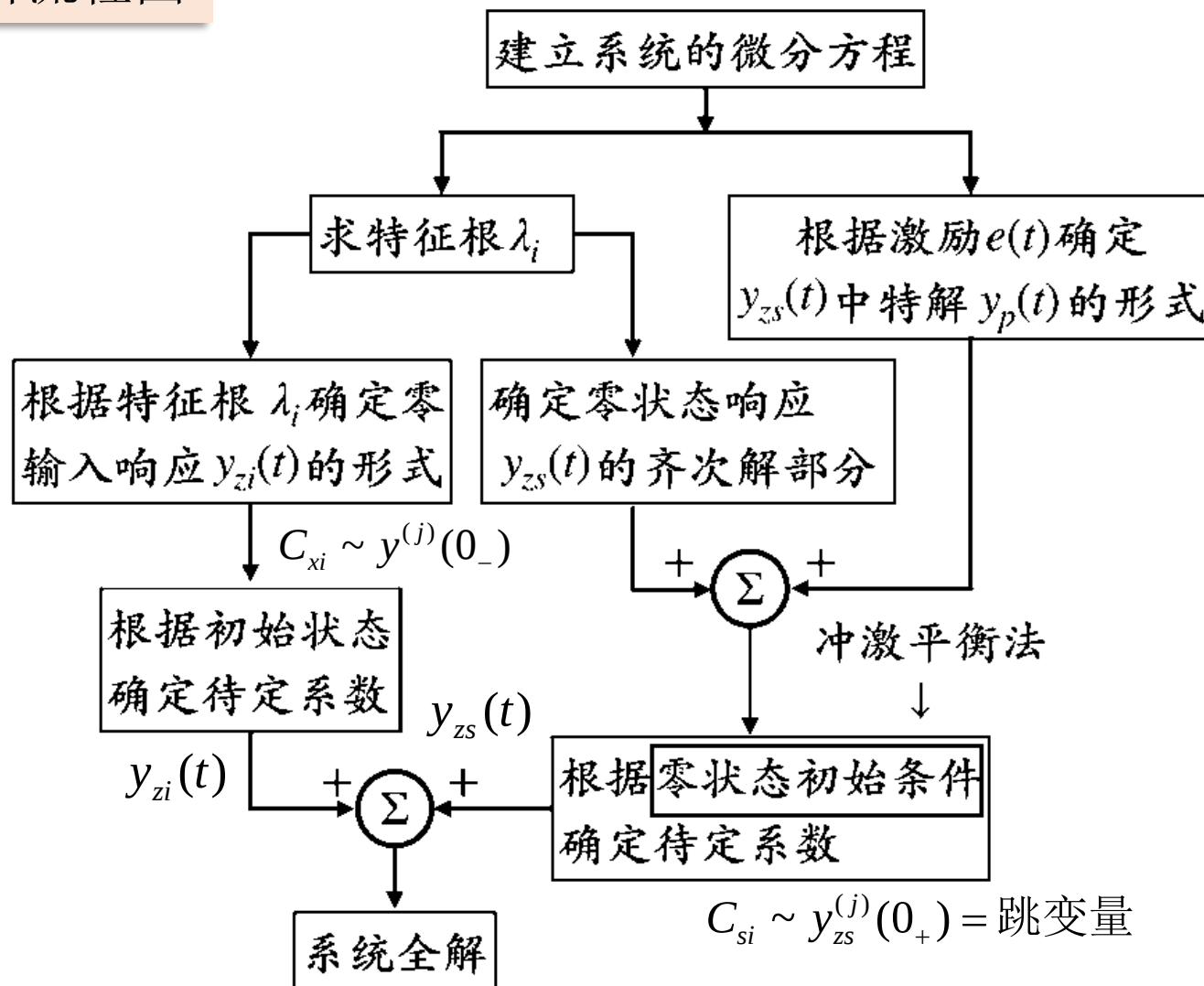
$$\underbrace{\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)}_{\substack{\text{初始条件} \\ = \text{初始状态} \\ + \text{跳变量}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{xi} e^{\lambda_i t}}_{\substack{\text{初始条件} \\ = \text{初始状态}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{si} e^{\lambda_i t} + y_p(t)}_{\substack{\text{初始条件} \\ = \text{跳变量}}}, \quad t > 0$$

➤ 辨析：待定系数 C_{xi} , C_{si} 与齐次解待定系数 C_i 的区别。

零输入响应包含一部分齐次解，零状态响应包含另一部分齐次解以及特解，待定系数满足 $C_i = C_{xi} + C_{si}$ 。

■ 求解思路总结

时域分析流程图



例题4

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e''(t) + 6e(t)$ ，初始状态 $y(0_-) = 1, y'(0_-) = 3$ ，激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ ，零状态响应 $y_{zs}(t)$ 与全响应 $y(t)$ 。

例题5

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e'(t) + 3e(t)$ ，初始状态 $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 1$ ，激励 $e(t) = t\varepsilon(t)$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ ，零状态响应 $y_{zs}(t)$ 与全响应 $y(t)$ 。

2.3 单位冲激响应与单位阶跃响应

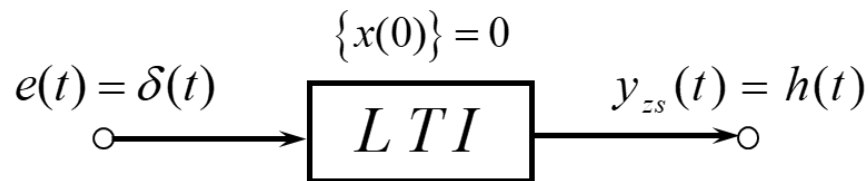
单位冲激响应 $h(t)$

单位阶跃响应 $g(t)$

$h(t)$ 与 $g(t)$ 的关系

■ 单位冲激响应 $h(t)$

单位冲激响应的定义



激励为冲激信号 $\delta(t)$ 时，LTI系统的零状态响应称为单位冲激响应，记为 $h(t)$ 。

$$h(t) \triangleq T[\{x(0) = 0\}, \{e(t) = \delta(t)\}]$$

单位冲激响应的形式

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t) \longrightarrow \sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)}(t)$$

$n > m$ $h(t) = \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) \varepsilon(t)$ 单位冲激响应与齐次解形式完全一致

$n = m$ $h(t) = \underline{C_0 \delta(t)} + \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) \varepsilon(t)$ 依据冲激平衡，多出冲激项

$n < m$ $h(t) = \underline{C_0 \delta(t) + C_{0(1)} \delta'(t) + \cdots + C_{0(m-n)} \delta^{(m-n)}(t)} + \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) \varepsilon(t)$

冲激平衡法

初始状态 $h^{(j)}(0_-) = 0$ $\longrightarrow$ 初始条件 $h^{(j)}(0_+) = \text{跳变量}$

例题6

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e'(t) + 2e(t)$ ，试求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

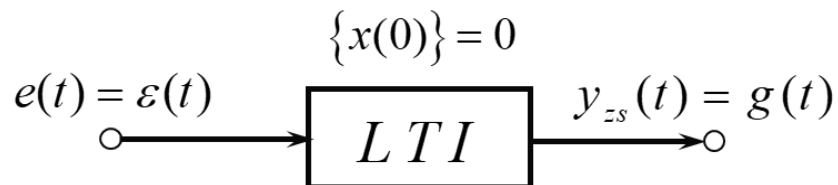
例题7

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e'''(t) + 2e'(t)$ ，试求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

■ 单位阶跃响应 $g(t)$

单位阶跃响应的定义

激励为阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 时，LTI系统的零状态响应称为单位阶跃响应，记为 $g(t)$ 。



$$g(t) \triangleq T[\{x(0) = 0\}, \{e(t) = \varepsilon(t)\}]$$

需注意的是，此处对应非齐次方程，单位阶跃响应可能包含有特解，因此按照分析零状态响应的一般思路去求就可以。

例题8

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3e'(t) + 2e(t)$ ，试求系统的单位阶跃响应 $g(t)$ 。

■ $h(t)$ 与 $g(t)$ 的关系

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$$

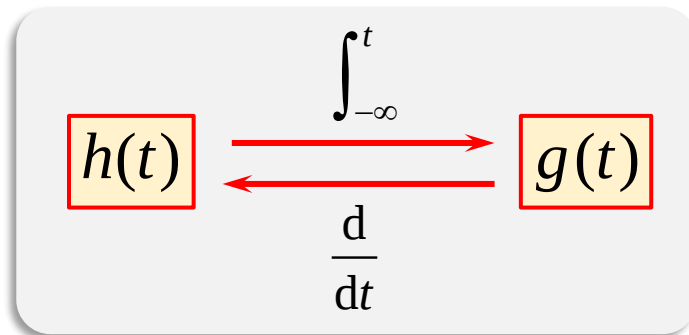
系统

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx$$

系统

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx$$



说明

单位冲激响应完全由系统微分方程决定，可表征系统特性，可以用 $h(t)$ 和 $g(t)$ 表征系统，并判断系统的因果性、稳定性等特性。

例题9

- 1) 已知某LTI连续系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ ，试求该系统的单位阶跃响应 $g(t)$ ；
- 2) 已知某LTI连续系统的单位阶跃响应为 $g(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$ ，试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

2.4 卷积积分

卷积积分的定义

卷积积分的求解

卷积积分的性质

■ 卷积积分的定义

卷积积分的定义式

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

对定义式的说明

- 这个积分式中， τ 是为了防止变量混淆而虚设的积分变量
- 卷积积分的最终结果是一个新的连续函数，自变量仍然为时间 t
- 卷积积分实质上是一个关于移位量 t 的连续时间函数

直观理解：上式对 τ 积分，最后剩下的变量是 t 。

■ 卷积积分的求解

解析法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

变量置换: $f_1(t), t \rightarrow \tau$ $f_2(t), t \rightarrow t - \tau$

相乘积分: 积分变量为 τ , 结果为关于 t 的函数。

关键: 依据信号的形式确定积分区间, 从而确定卷积结果的信号形式

➤ 若 $f_1(t)$ 是因果信号, 即 $f_1(t) = 0, t < 0$, $f_2(t)$ 不受限制, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad \tau > 0$$

➤ 若 $f_2(t)$ 是因果信号, 即 $f_2(t) = 0, t < 0$, $f_1(t)$ 不受限制, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad t - \tau > 0 \Rightarrow \tau < t$$

➤ 若 $f_1(t), f_2(t)$ 均为因果信号, $f_1(t) = f_2(t) = 0, t < 0$, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad \tau > 0, t - \tau > 0 \Rightarrow 0 < \tau < t$$

例题10 求解下列卷积积分。

1) $e^{-t}\varepsilon(t)*e^{-2t}\varepsilon(t)$

2) $\varepsilon(t)*\varepsilon(t)$

3) $e^{-t}*e^{-2t}\varepsilon(t)$

4) $t\varepsilon(t)*e^{-t}\varepsilon(t)$

5) $\varepsilon(t+2)*\varepsilon(t-3)$

注意：积分区间的确定，求得卷积后信号的范围。

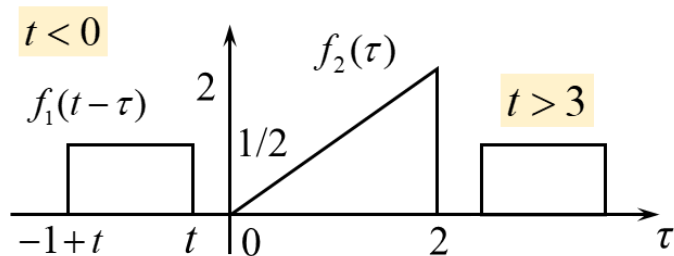
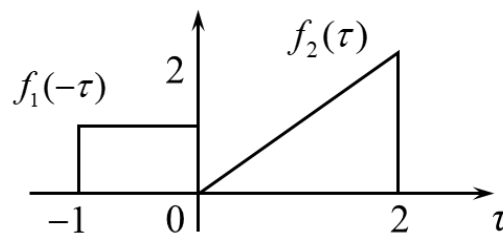
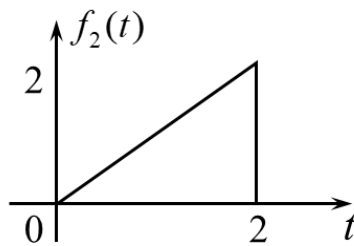
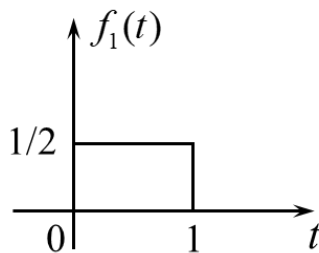
■ 卷积积分的求解

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

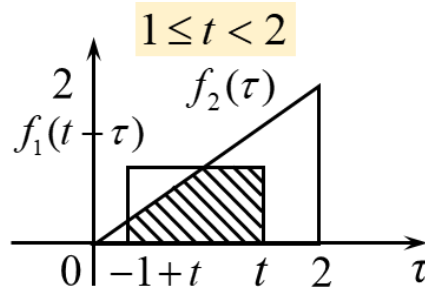
图解法

- **变量置换：** $f_1(t) \rightarrow f_1(\tau)$, $f_2(t) \rightarrow f_2(\tau)$ ，作出 $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ 的波形
- **波形反折：** $f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$ ，即作出 $f_2(\tau)$ 关于纵轴反折后的波形
- **波形移位：** $f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t - \tau)$ ，即将 $f_2(-\tau)$ 沿着 τ 轴平移一个 t 值，得到 $f_2(t - \tau)$ ： $t < 0$ 时左移， $t > 0$ 时右移
- **函数相乘：** 将移位后的函数 $f_2(t - \tau)$ 与 $f_1(\tau)$ 相乘，得到卷积积分的被积函数 $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$
- **求解积分：** 若 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t - \tau)$ 波形有重叠，则卷积积分为 $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$ 在重叠区间的积分；若波形无重叠，则卷积积分为0。
- **时间遍历：** 令 t 在 $(-\infty, +\infty)$ 内变化，重复以上步骤，最终解出卷积。

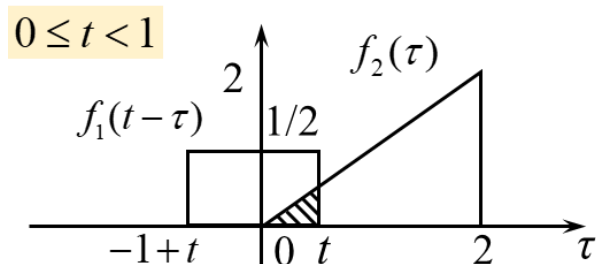
例题11 信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 如图, 利用图解法求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。



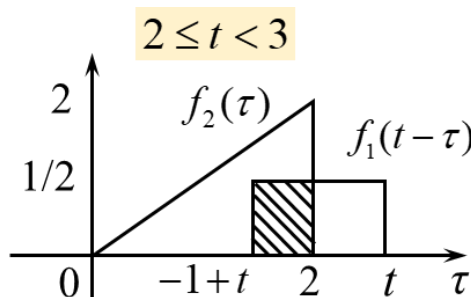
$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$



$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-1}^t \frac{1}{2} \tau d\tau = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$$

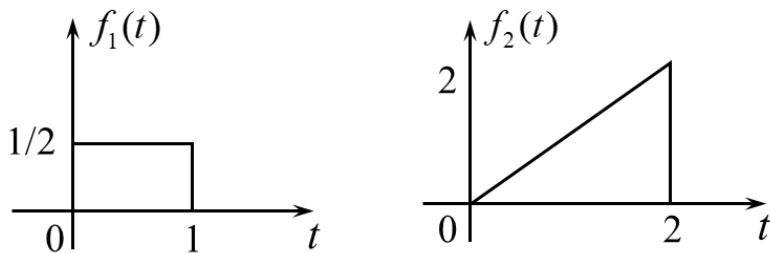


$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \tau d\tau = \frac{1}{4}t^2$$

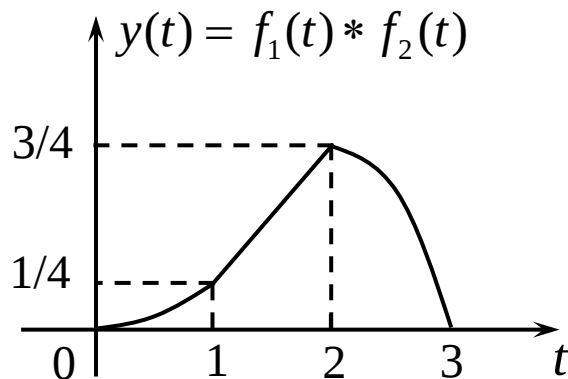


$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-1}^2 \frac{1}{2} \tau d\tau = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

例题11 信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 如图, 利用图解法求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。



$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} & 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t > 3 \end{cases}$$

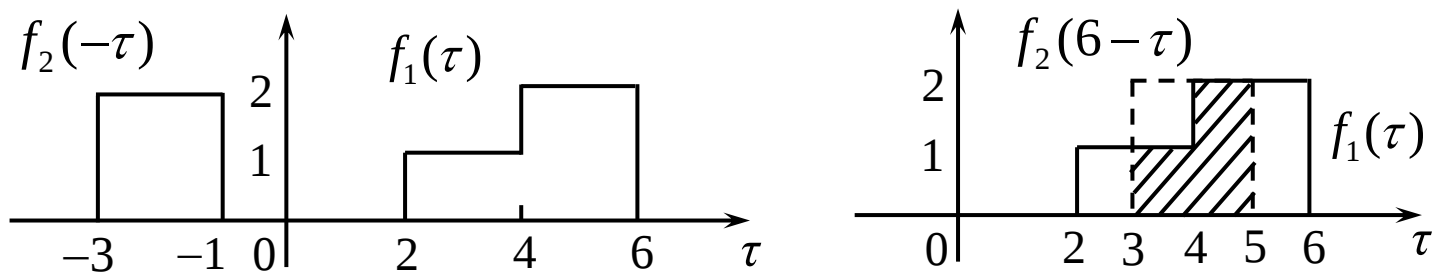
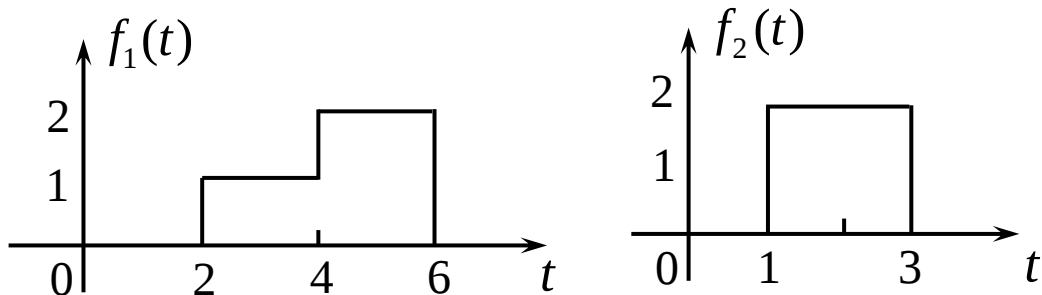


■ 卷积积分的特点

- 卷积积分实质上是关于移位量 t 的函数, t 蕴含在重叠区间内
- $f_1(t) * f_2(t)$ 的时域范围为两信号的时域范围之和

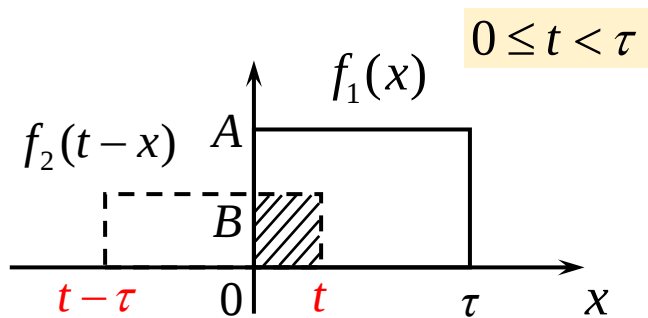
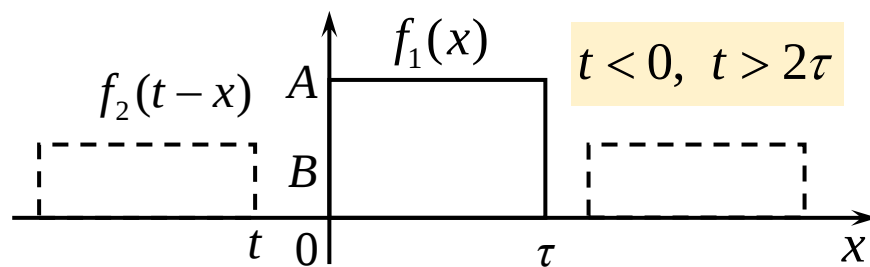
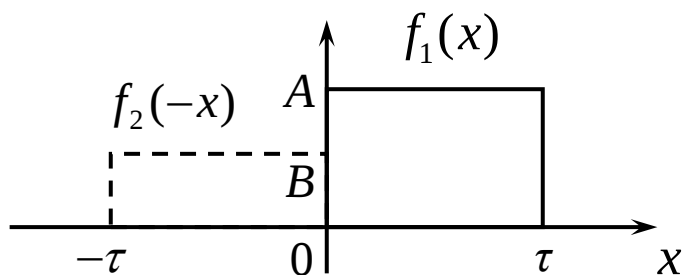
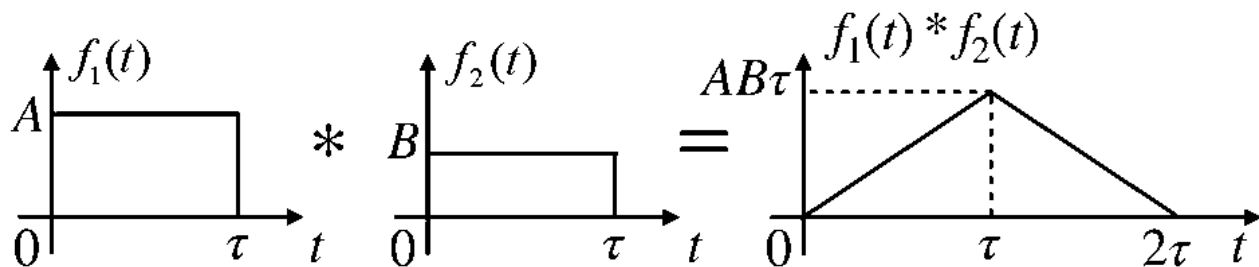
例题12

信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 如图, 已知 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 求 $y(6)$ 。



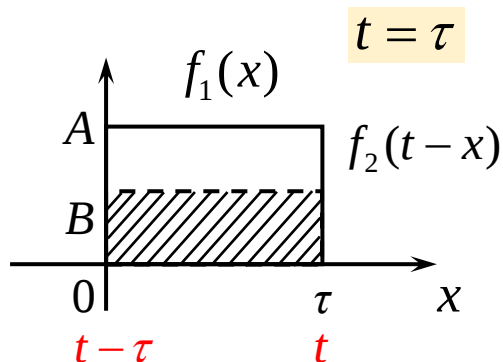
$$y(6) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(6-\tau) d\tau = \int_3^4 2 \times 1 d\tau + \int_4^5 2 \times 2 d\tau = 6$$

例题13 通过卷积形成三角脉冲。



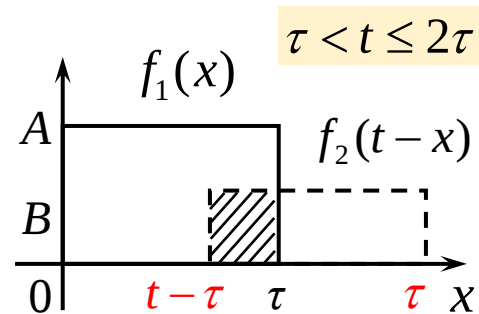
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^t d\tau = ABt$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^\tau d\tau = AB\tau \quad \text{顶点}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$= AB \int_{t-\tau}^\tau d\tau = AB(2\tau - t)$$

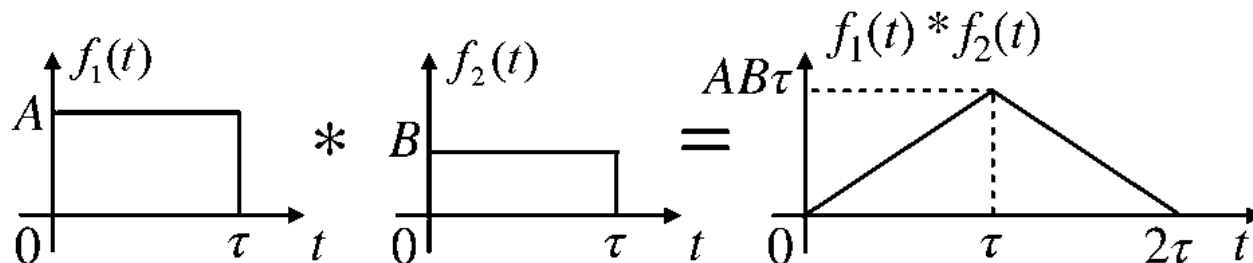
■ 卷积积分的求解

相关结论

两个等宽的门函数卷积

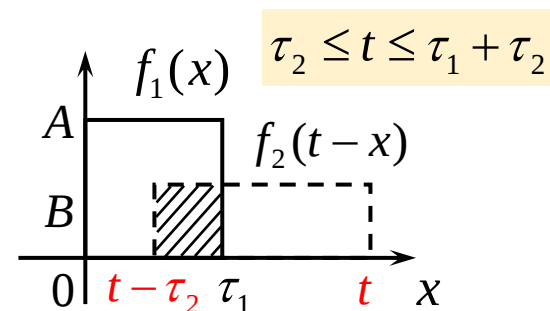
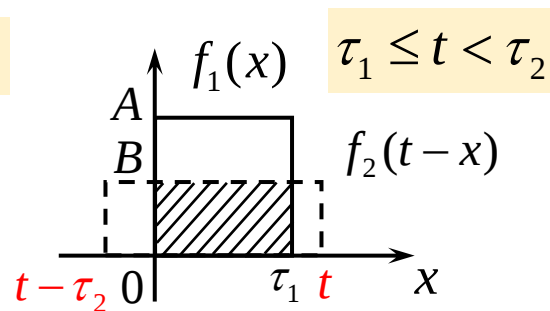
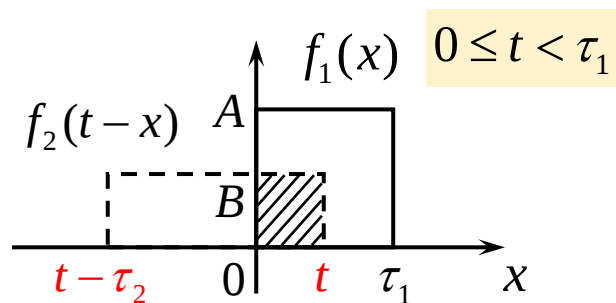
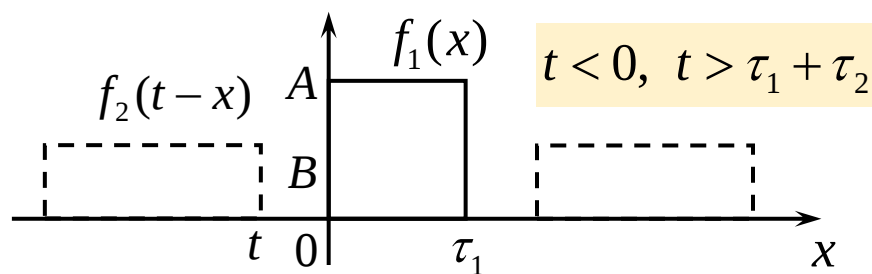
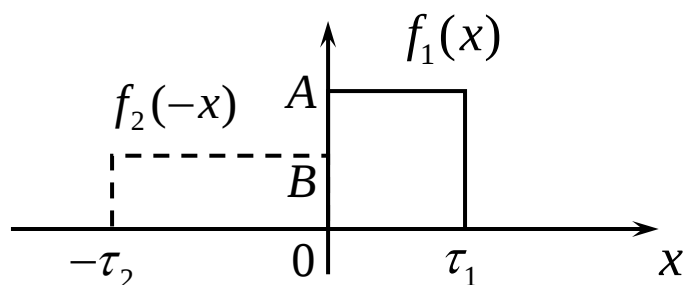
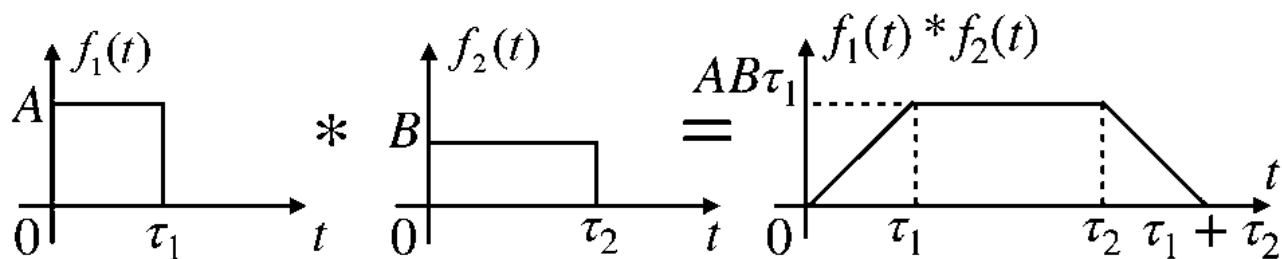
结果为等腰三角形

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} ABt & 0 \leq t < \tau \\ AB(2\tau - t) & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t \leq 0, t > 2\tau \end{cases}$$



- 三角形高度：两门函数幅度之积乘以门宽。
- 三角形的底：门函数宽度之和。
- 时间范围：卷积积分的范围为两函数时间范围之和。

例题14 通过卷积形成**梯形脉冲**。



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^t d\tau = ABt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^{\tau_1} d\tau = AB\tau_1 \quad \text{顶点}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

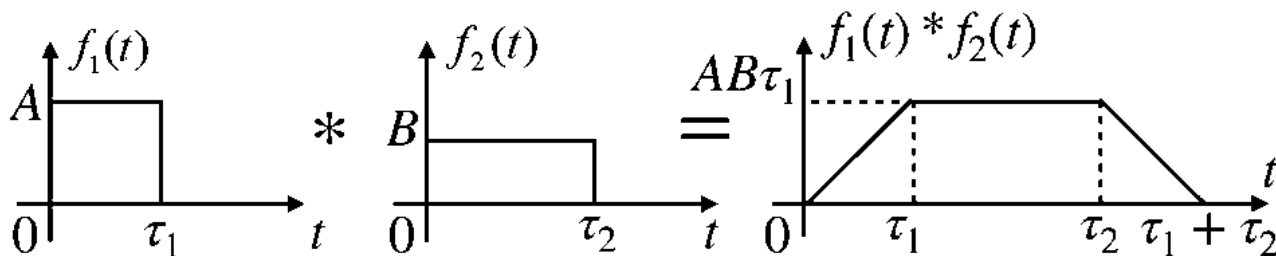
$$= AB \int_{t-\tau_2}^{\tau_1} d\tau = AB(\tau_1 + \tau_2 - t)$$

■ 卷积积分的求解

相关结论

两个不等宽的门函数卷积结果
为等腰梯形

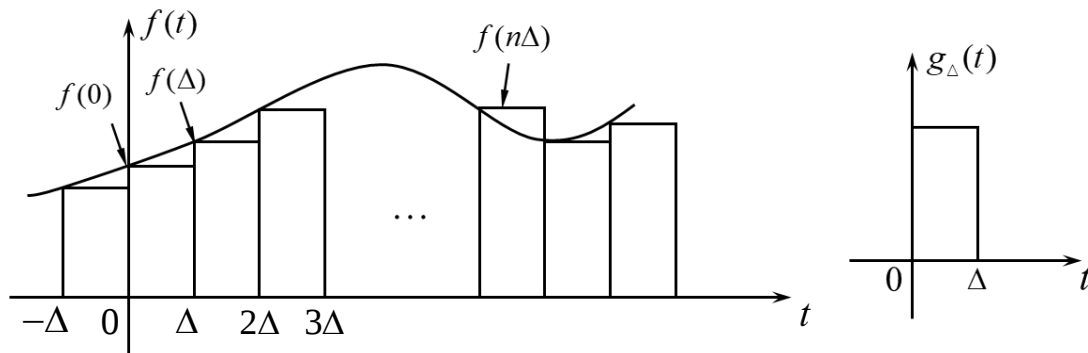
$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} ABt & 0 \leq t < \tau_1 \\ AB\tau_1 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ AB(\tau_1 + \tau_2 - t) & \tau_2 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2 \\ 0 & t < 0, t > \tau_1 + \tau_2 \end{cases}$$



- 梯形高度：两门函数幅度之积乘以窄门门宽。
- 梯形上底：门函数宽度之差的绝对值。
- 梯形下底：门函数宽度之和。
- 时间范围：卷积积分的范围为两函数时间范围之和。

■ 卷积积分的性质

➤ 任意信号的分解 $f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)g_{\Delta}(t-n\Delta) \cdot \Delta$



$\Delta \rightarrow 0$ $\Delta \rightarrow d\tau$ 分割间隔无限密集, 变为无穷小量

$n\Delta \rightarrow \tau$ 离散时间 $\rightarrow$ 连续时间

$g_{\Delta}(t-n\Delta) \rightarrow \delta(t-\tau)$ 门函数 $\rightarrow$ 冲激信号

$f(n\Delta) \rightarrow f(\tau)$ 离散取值 $\rightarrow$ 连续函数

$$f(t) = f(t) * \delta(t)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)g_{\Delta}(t-n\Delta) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

任意信号可以用一系列单位冲激信号及其移位信号的线性组合

■ 卷积积分的性质

➤ 借助单位冲激响应与卷积积分求解系统的零状态响应

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

单位冲激响应: $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

时不变性: $\delta(t - \tau) \longrightarrow h(t - \tau)$

齐次性: $e(\tau) \delta(t - \tau) \longrightarrow e(\tau) h(t - \tau)$

叠加性: $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) * h(t)$$

连续系统的零状态响应为激励信号和系统单位冲激响应的卷积积分

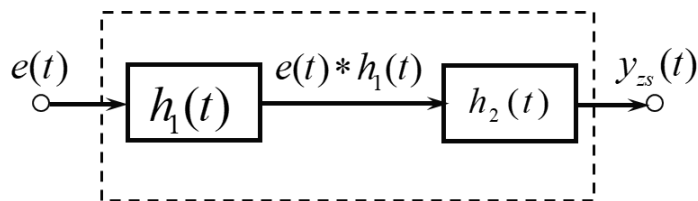
$$y_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

■ 卷积积分的性质

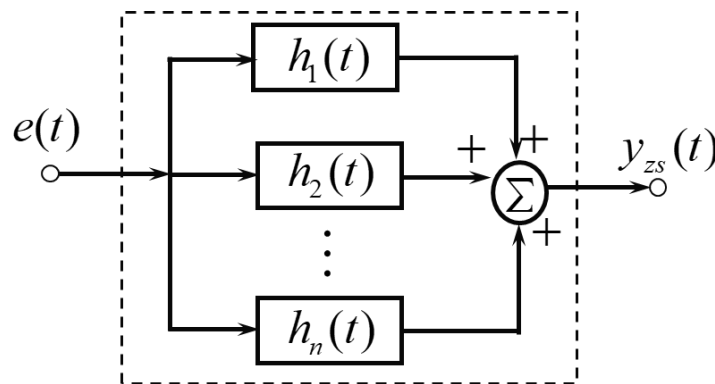
代数性质

- 交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ 卷积积分中反折函数可以任选。
- 分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$
- 结合律 $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$

复合系统的冲激响应



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \cdots + h_n(t)$$

n 个**级联系统**的等效冲激响应为
 n 个子系统**冲激响应卷积**

n 个**并联系统**的等效冲激响应为
 n 个子系统**冲激响应之和**

■ 卷积积分的性质

移位性质

$$f_1(t) * f_2(t-t_0) = f_1(t-t_0) * f_2(t) = f(t-t_0)$$

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1) = f(t-t_1-t_2)$$

参与卷积的两个函数，有一个移位，整体就会产生相同的移位

例题15 已知 $f_1(t) = e^{-2t}\varepsilon(t+1)$, $f_2(t) = \varepsilon(t-3)$ ，且 $e^{-2t}\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$
求卷积积分 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

■ 卷积积分的性质

奇异函数的卷积特性

➤ 冲激信号的卷积

$$\begin{cases} f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t) \\ f(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0) \end{cases}$$

函数卷积冲激函数等于其本身，卷积移位的冲激函数等于该函数本身进行移位：**重现性质**。

➤ 冲激偶信号的卷积

$$\begin{aligned} f(t) * \delta'(t) &= f'(t) \\ f(t) * \delta^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

函数卷积冲激偶信号相当于对函数求导

➤ 阶跃信号的卷积

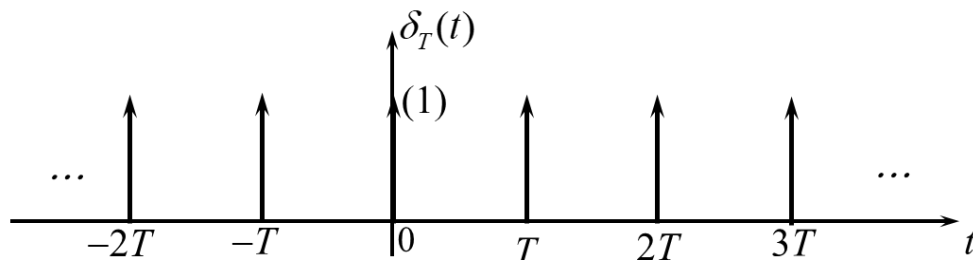
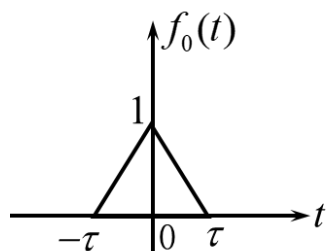
$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

函数与阶跃函数卷积，相当于对函数积分

■ 卷积积分的性质

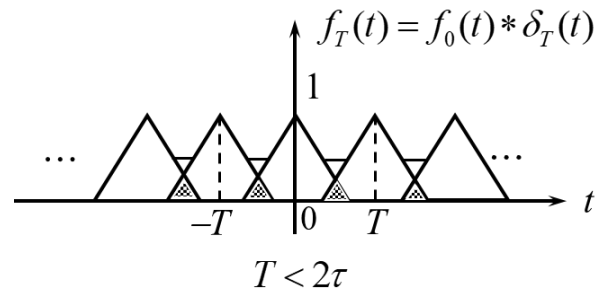
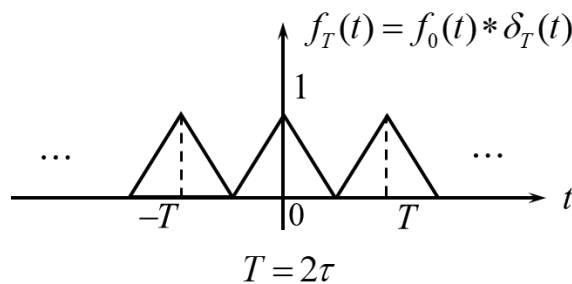
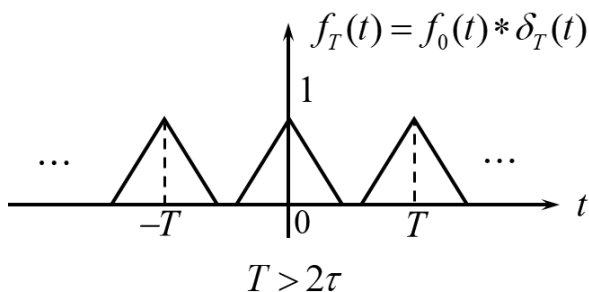
奇异函数的卷积特性

利用卷积积分构造周期信号



$$f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t) = f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT)$$

可以利用第一个周期内的信号脉冲单体 $f_0(t)$ 和周期为 T 的冲激串信号的卷积积分构造周期信号。



■ 卷积积分的性质

卷积的微分与积分

➤ 微分性质: $\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt} f_2(t)$

➤ 积分性质: $\int_{-\infty}^t [f_1(x) * f_2(x)] dx = \int_{-\infty}^t f_1(x) dx * f_2(t) = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(x) dx$

对两个函数卷积积分的结果求导/积分，等于先对其中任一函数求导/积分后再卷积。

➤ 微积分性质: $f_1(t) * f_2(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(x) dx = \int_{-\infty}^t f_1(x) dx * \frac{d}{dt} f_2(t)$

两个函数卷积积分的结果，等于先对其中任一函数求导，再对另一个函数求积分，然后两个函数再卷积。

例题16 求解下列卷积积分。

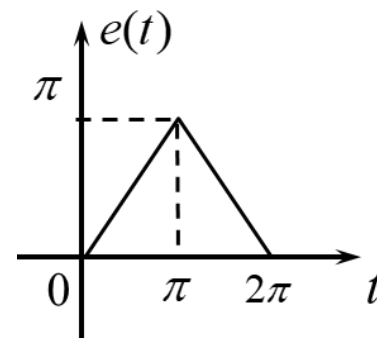
1) $e^{-t}\varepsilon(t) * \delta(3t+2)$

2) $e^{-2t}\varepsilon(t) * \delta''(t) * \varepsilon(t)$

3) $e^{-2t}\varepsilon(t) * \delta''(t-1) * [t\varepsilon(t)]$

例题17

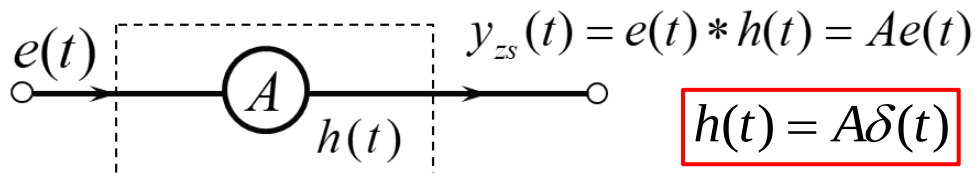
已知某线性时不变系统的冲激响应 $h(t) = \cos t \cdot \varepsilon(t)$ ，当激励为下图时，试利用卷积的性质求解系统的零状态响应。



■ 卷积积分的性质

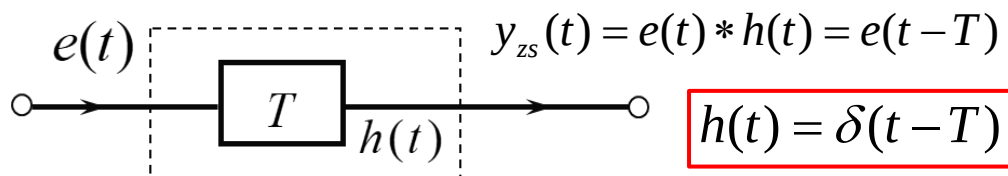
一些常用子系统的单位冲激响应

➤ 数乘器

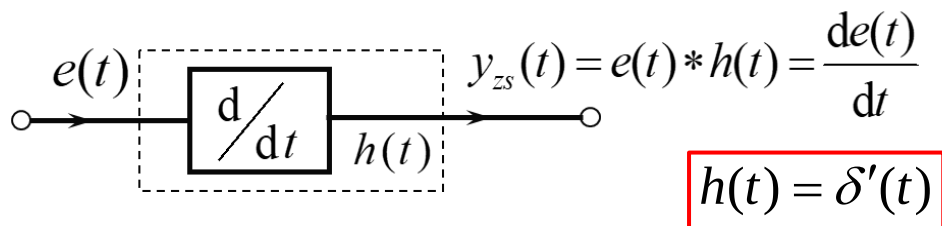


直通通路, $A = 1$, 冲激响应为 $h(t) = \delta(t)$

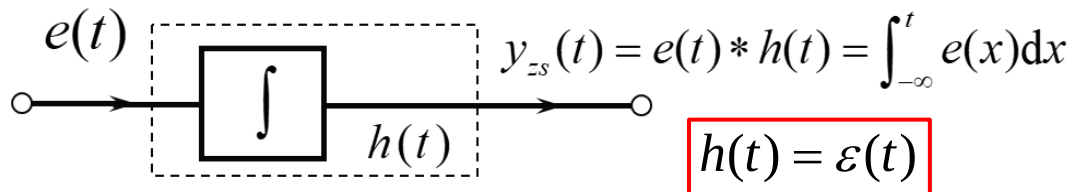
➤ 延时器



➤ 微分器

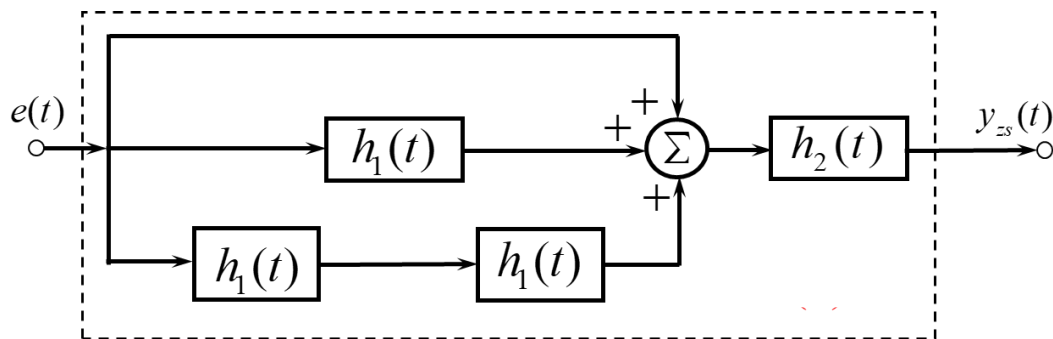


➤ 积分器



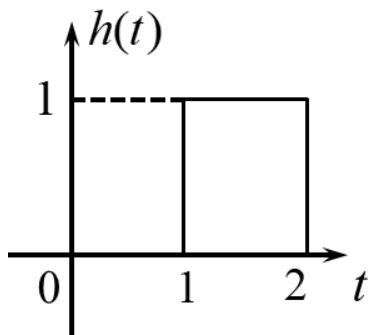
例题18

如图所示系统由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t) = \delta(t-1)$, $h_2(t) = \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3)$ ，试求总系统的冲激响应 $h(t)$ 并画出其波形。



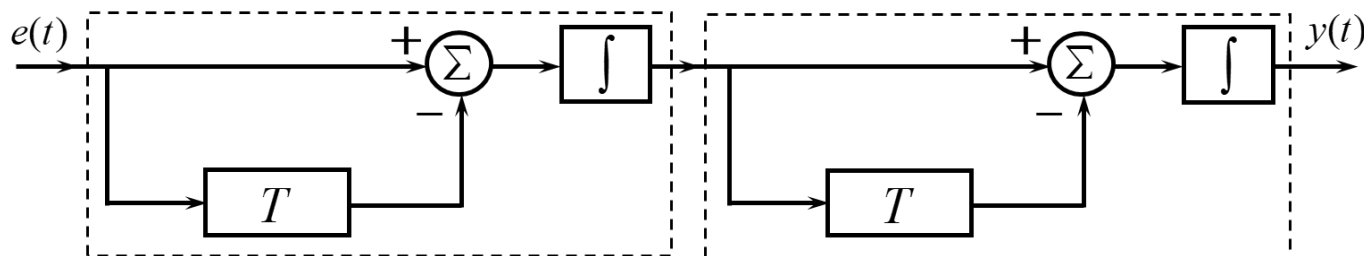
例题19

某一连续系统的冲激响应如下图所示，试用积分器、加法器和延时器（ $T = 1$ ）构成该系统。



例题20

某LTI连续系统如图，激励 $e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，试求此系统的零状态响应并画出波形。



2.4补充：互相关函数与自相关函数

互相关和自相关函数的定义

相关与卷积的关系

■ 互相关和自相关函数的定义

为比较某信号与另一延时 τ 的信号之间的相似度，需要引入相关函数的概念，相关函数也称为相关积分，它与卷积的运算方法类似。

互相关函数

已知实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均为能量信号，则它们之间的互相关函数定义为：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

注意：角标数字，前面的信号领先时间 τ 。

互相关函数是两信号时间差 τ 的函数。

一般： $R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau)$

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \\ R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau) \end{cases}$$

■ 互相关和自相关函数的定义

自相关函数

如果实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是同一个信号 $f(t)$ ，此时无需区分 $R_{12}(\tau)$ 和 $R_{21}(\tau)$ ，用 $R(\tau)$ 表示，称为自相关函数，即：

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) f(t) dt$$

对自相关函数，有：

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

实函数的自相关函数是时移 τ 的偶函数。

■ 相关与卷积的关系

卷积定义式：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

互相关定义式：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \xrightarrow{t, \tau \text{ 互换}} R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

卷积和相关运算的不同之处：卷积积分中存在函数的反折，而相关运算则不需要反折，其余移位、相乘积分的运算方法相同。

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2[-(t - \tau)] d\tau = f_1(t) * f_2(-t)$$

两个实、偶函数的相关运算与卷积运算的结果相同。

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger